Неравенство Коши для n слагаемых.

- **Докажем, что для $\forall a_i$: $a_i \geq 0, 1 \leq i \leq k, k \epsilon \mathbb{N}$ выполнено неравенство:**
- $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k}$.
- **Докажем по ММИ.**
- База: пусть k=**2.** Тогда должно быть $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2}$, что верно, мы доказывали это ранее.
- Шаг: пусть для всех $k \leq n$ неравенство доказано, то есть $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_т}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$
- Рассмотрим $k = n+1$. Докажем, что $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1}}$.
- Рассмотрим $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Пусть a_{n+1} – наибольшее из всех $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$.
- Положим $S_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$; $S_{n+1} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1}$.
- Сравним a_{n+1} и S_n, то есть сравним a_{n+1} и $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.
- Заметим, что сравнить a_{n+1} и $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, всё равно, что сравнить $n \cdot a_{n+1}$ и $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
- Далее, $n \cdot a_{n+1} = \underbrace{a_{n+1} + a_{n+1} + \cdots + a_{n+1}}_{n \text{ слагаемых}}$.
- Тогда $a_{n+1} + a_{n+1} + \cdots + a_{n+1} \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.
- Тогда можно положить $a_{n+1} = S_n + d, d \geq 0$.
- Следовательно, $S_{n+1} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1} = \frac{nS_n+a_{n+1}}{n+1}$.
- Возведем S_{n+1} в степень $n+1$.
- $(S_{n+1})^{n+1} = \left(\frac{nS_n+a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{nS_n+S_n+d}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{nS_n+S_n}{n+1} + \frac{d}{n+1}\right)^{n+1} = \left(S_n + \frac{d}{n+1}\right)^{n+1} =$
- $= \left(S_n\left(1 + \frac{d}{S_n(n+1)}\right)\right)^{n+1} = S_n{}^{n+1}\left(1 + \frac{d}{S_n(n+1)}\right)^{n+1}$.
- Далее, к скобке $\left(1 + \frac{d}{S_n(n+1)}\right)^{n+1}$ применим неравенство Бернулли (доказано нами ранее, во время изучения ММИ).
- $\left(1 + \frac{d}{S_n(n+1)}\right)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot \frac{d}{S_n(n+1)} = 1 + \frac{d}{S_n}$.
- Таким образом, $(S_{n+1})^{n+1} = S_n{}^{n+1}\left(1 + \frac{d}{S_n(n+1)}\right)^{n+1} \geq S_n{}^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{d}{S_n}\right) = S_n{}^{n+1} \cdot \left(\frac{S_n+d}{S_n}\right) =$
- $= S_n{}^n \cdot (S_n + d) = S_n{}^n \cdot a_{n+1}$.
- $(S_n)^n \cdot a_{n+1} = \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n \cdot a_{n+1}$.
- Вспомним индукционное предположение $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$.
- Тогда $S_n{}^n \cdot a_{n+1} = \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n \cdot a_{n+1} \geq \left(\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}\right)^n \cdot a_{n+1} = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1}$.
- **Итак,** $(S_{n+1})^{n+1} \geq a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1} \Leftrightarrow \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} \geq a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1} \Leftrightarrow$
- $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1}}$.
- Что и требовалось доказать.