РАЗЛИЧНЫЕ СРЕДНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ. НЕРАВЕНСТВО КОШИ.

I. Введение.

В школьном курсе математики и физики изучаются средние величины (среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее гармоническое и среднее квадратичное).

Между ними существуют удивительные соотношения, которые исследованы учёными. О.Коши, французский математик, сопоставив две средние величины, пришёл к выводу о том, что среднее арифметическое n чисел всегда не меньше среднего геометрического этих чисел.

Неравенство Коши используется при решении уравнений, неравенств и систем методом оценок. Развитие теории неравенств с переменными за последние сто лет привело к появлению в ней необычайного разнообразия методов и направлений, что и стало предметом моего исследования.

В школьном курсе математики каждый пятиклассник встречается со средним арифметическим двух или нескольких натуральных чисел ($\frac{a+b}{2}$; $\frac{a+b+c}{3}$;…). При изучении геометрии в восьмом классе, рассматривая прямоугольный треугольник, каждый школьник знакомится со средним геометрическим двух отрезков ($\sqrt{ab}$). В прямоугольном треугольнике таким свойством обладают три отрезка: два катета и перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу. С уроков физики известно, что если v_1 и v_2 - скорости на двух одинаковых участках пути, то средняя скорость равна $\frac{2v_1 \bullet v_2}{v_1+v_2}$, то есть является средним гармоническим v_1 и v_2. Существует ещё и четвёртое среднее – среднее квадратичное $\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)$.

Можно выделить большой класс задач, для решения которых достаточно знать и уметь применять сравнительно несложные неравенства. К числу таких неравенств относится, прежде всего, неравенство Коши: среднее арифметическое двух положительных чисел *a* и *b* не меньше их среднего геометрического: $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$. Наряду с неравенством Коши полезно знать следствия из него:

$$a+b \ge 2\sqrt{ab}$$
$$a^2+b^2 \ge 2ab$$
$$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$ab \le \frac{1}{2}(a^2+b^2).$$

В неравенствах равенство достигается, если $a = b$. Эти неравенства эквивалентны друг другу при $a>0$, $b>0$.

II. Понятие средней величины.

Средней величиной действительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n (n \in N)$ называют всякое действительное число *x*, удовлетворяющее условию $m \le x \le M$, где *m* – наименьшее, а *M* – наибольшее среди чисел $a_1, a_2, ..., a_n (n \in N)$.

Средняя величина чисел $a_1, a_2, ..., a_n (n \in N)$ только одна в том и только в том случае, когда $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Средним геометрическим действительных неотрицательных чисел $a_1, a_2, ..., a_n (n \ge 2)$ называют такое действительное неотрицательное число $G = G(a_1, a_2, ..., a_n) = \sqrt[n]{a_1 \bullet a_2 \bullet ... \bullet a_n}$.

Средним арифметическим действительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n (n \ge 2)$ называют действительное число $A = A(a_1, a_2, ..., a_n) = \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$.

Средним гармоническим действительных положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n (n \geq 2)$ называют положительное число $H = H(a_1, a_2, ..., a_n) = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + ... + \dfrac{1}{a_n}}$.

Средним квадратическим (квадратичным) действительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n (n \geq 2)$ называют неотрицательное действительное число $Q = Q(a_1, a_2, ..., a_n) = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}$.

Если рассмотреть два положительных числа a и b, то эти средние величины будут выглядеть следующим образом:

- среднее арифметическое: $A = \dfrac{a+b}{2}$;
- среднее геометрическое: $G = \sqrt{ab}$;
- среднее гармоническое: $H = \dfrac{2ab}{a+b}$;
- среднее квадратичное: $Q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

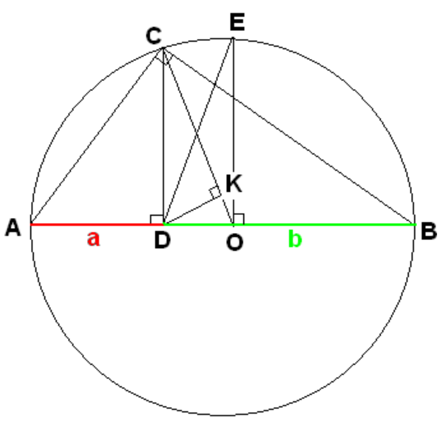
III. Средние числовые величины в геометрических моделях.

Задачи № 1. Определить среднюю скорость туриста на всем пути, если от пункта А до пункта В он шёл со скоростью v_1, а обратно – со скоростью v_2.

Решение. Обозначим символом S расстояние между пунктами А и В, тогда $\dfrac{S}{v_1}$ - время туриста от А до В, а $\dfrac{S}{v_2}$ - время туриста обратно. $\dfrac{S}{v_1} + \dfrac{S}{v_2}$ - время, затраченное на весь путь.

Тогда $v_{ср} = \dfrac{2S}{\dfrac{S}{v_1} + \dfrac{S}{v_2}} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_2}} = \dfrac{2}{\dfrac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}} = \dfrac{2v_1 v_2}{v_1 v_2}$.

Получили, что $v_{ср}$ есть среднее гармоническое скоростей v_1 и v_2.



Задача № 2. В прямоугольном треугольнике АВС из вершины С на гипотенузу опущен перпендикуляр CD, который делит гипотенузу на отрезки AD = a; BD = b. Выразить через a и b:

1) OE;
2) CD;
3) DE (где Е – есть точка пересечения окружности, описанной около треугольника АВС, и перпендикуляра, проведённого к АВ через центр окружности);
4) CK (где точка К- есть основание перпендикуляра, опущенного из точки D на r = CO).

Решение.

1) ΔABC – прямоугольный, поэтому AB – диаметр окружности AB $= a + b$, O – центр окружности, то есть AO = OB = OE = $\dfrac{a+b}{2}$

Получили, что EO = $\dfrac{a+b}{2}$ является средним арифметическим двух отрезков, длины которых a и b.

2) $CD \perp$ AB (по условию), следовательно, по свойству перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу, $CD^2 = AD \bullet DB$. Значит $CD = \sqrt{AD \bullet DB}$, то есть $CD = \sqrt{a \bullet b}$.

CD является средним геометрическим двух отрезков, длины которых равны a и b.

3) ΔOED – прямоугольный, так как $EO \perp$ AB (по условию)

$OE = \frac{a+b}{2}$ (как радиус окружности)

$OD = AO - AD = \frac{a+b}{2} - a = \frac{a+b-2a}{2} = \frac{b-a}{2}$. По теореме Пифагора $DE^2 = OD^2 + OE^2$.

$DE^2 = (\frac{b-a}{2})^2 + (\frac{a+b}{2})^2 = \frac{(b-a)^2 + (a+b)^2}{4} = \frac{b^2 - 2ab + a^2 + a^2 + 2ab + b^2}{2} = \frac{2(a^2+b^2)}{4} = \frac{a^2+b^2}{2}$ $\Rightarrow DE = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, то есть DE является средним квадратичным для двух отрезков, длины которых a и b.

4) ΔDOC – прямоугольный, так как CD ⊥ AB. Проведём $DK \perp CO$.

По свойству прямоугольного треугольника CD² = CO • CK, то есть $CK = \frac{CD^2}{CO} = \frac{2ab}{a+b}$, то есть CK – среднее гармоническое для a и b.

5) Из решения этой задачи видно, что для двух отрезков a и b можно найти четыре зависимости: среднее квадратичное, среднее гармоническое, среднее арифметическое, среднее геометрическое.

IV. В какой же зависимости они находятся друг от друга?

Из истории средних величин.

Когда возникли понятия средних величин в математике, точно не известно. Но предполагают, что уже вавилоняне более трех тысяч лет назад использовали их при вычислении квадратных корней. В дошедших до нас табличках квадратные корни из натуральных чисел фактически вычислены по известной нам формуле: если N = β² + r, то $\sqrt{N} = \sqrt{\beta^2 + r} \approx \beta + \frac{r}{2\beta}$.

Восстанавливая ход рассуждений вавилонян, современные учёные пришли к выводу, что они брали среднее арифметическое чисел β и $\frac{N}{\beta}$. В самом деле, если обозначить $\alpha = \frac{N}{\beta}$, то $\beta_1 = \frac{\alpha+\beta}{2} = \beta + \frac{r}{2\beta}$.

Много позже древнегреческий математик Герон (I в.) в своей «Метрике», применяя тот же метод приближённого вычисления квадратного корня, писал, что если результат получается со слишком большой погрешностью, то указанную процедуру можно повторить, т.е. взять среднее арифметическое чисел β_1 и $\frac{N}{\beta_1}$.

Применим этот алгоритм к вычислению квадратного корня из натурального числа, записав его в виде произведения двух натуральных чисел: $N = ab$ (при простом N один из сомножителей равен 1). В качестве первого приближения значения $\sqrt{ав}$ возьмём $b_1 = \frac{a+b}{2}$, затем, следуя рекомендации Герона, найдем $a_1 = \frac{ab}{b_1}$, которое оказывается средним гармоническим $\frac{2ab}{a+b}$ чисел a и b.

Также средние величины были известны и античным математикам. В одном из математических тестов, которые приписывают древнегреческому математику Архиту (ок. 428 – 365 г.г. до н.э.), среднее арифметическое A, среднее геометрическое G и среднее гармоническое H определялись как равные члены соответственно арифметической, геометрической и гармонической пропорций:

$a - A = A - b$; $a : G = G : b$; $(a - H) : a = (H - b) : b$.

Из этих равенств получаем: $A = \frac{a+b}{2}$; $G = \sqrt{ab}$; $H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$.

Свои названия перечисленные средние величины получили в античные времена.
Аристотель (384 – 322 г.г. до н.э.), великий философ древности, объяснял происхождение названий так: среди чисел $a, \frac{a+b}{2}, b$ каждое последующее больше предыдущего на постоянное число $\frac{b-a}{2}$ (при условии $a < b$), а сравнения типа «на сколько одно число больше другого» используется лишь в арифметике. Для величин $a, \sqrt{ab}, b$ каждая следующая больше предыдущего в фиксированное число

$\sqrt{\frac{b}{a}}$ раз; такое сравнение производится только в геометрии. Естественно, Аристотель высказывал отношение к операциям, бытовавшим в древнегреческой математике.

Иногда вместо термина «среднее геометрическое» используют название *среднее пропорциональное.* Объясняется это совсем просто: ведь равенство $G = \sqrt{ab}$ равносильно пропорции $a\colon G = G\colon b$.

По преданию гармоническое среднее ввёл Пифагор (VI в. до н.э.), выразив с его помощью отношение основных гармонических интервалов. Пифагор установил, что вместе со струной длиной $12l$, созвучно сливаясь с ней звучат струны того же натяжения с длинами $6l$ (выше на октаву), $8l$ и $9l$ (выше на кванту и на кварту), при этом $9l$ есть среднее арифметическое чисел $6l$ и $12l$, а $8l$ он определил как среднее гармоническое этих чисел. Это созвучие (и определяющее его отношение 6, 8, 9, 12) называлось тетрадой. Пифагорейцы считали, что тетрада есть «та гамма, по которой поют сирены». Открытие тетрады привело пифагорейцев к поискам подобных соотношений в других областях человеческих знаний, в том числе архитектуре («золотое сечение»), геометрии, космологии и т.д.

В древнегреческой математике, которая была по преимуществу геометрической, было известно несколько способов построения средних по двум данным отрезкам *а* и *в*. У Паппы Александрийского (III в.) в его «Математическом собрании», своде результатов древнегреческой математики, приведено построение среднего геометрического двух отрезков по способам его предшественников Эратосфена (276 – 174 г.г. до н.э.), Никомеда (II в. до н.э.) и Герона (I в.), дано также описание построения на одной фигуре всех трёх отрезков.

Формулы, задающие различные средние, вообще говоря, имеют смысл не только при положительных a и b. Однако, чтобы каждый раз не задумываться над вопросом существования средней величины, обычно считают a и b положительными.

Соотношение между средними величинами.

- ***Сравнение среднего арифметического и среднего геометрического.***

Среднее арифметическое $\frac{a+b}{2}$ и среднее геометрическое $\sqrt{ab}$ неотрицательных чисел a и b связаны соотношением: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (равенство выполняется только при $a = b$).

1. *Алгебраическое доказательство:*

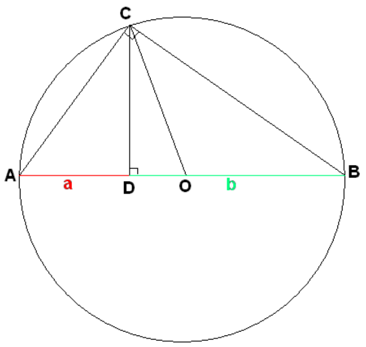
$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0.$$

Таким образом,

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ $\forall\, a,b \geq 0$. При чём равенство достигается при $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} = 0; \sqrt{a} = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b.$

Что и требовалось доказать.

2. *Геометрическое доказательство-1:*



•*Сравнение среднего арифметического и среднего геометрического для двух положительных чисел a и b.*

Дано: окр.*(O;OA); AD = a; BD = b*

Доказать: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

Доказательство: 1) AB – диаметр, AB $= a + b$ и $OD = OC = OB = \frac{AB}{2}$,

следовательно, $OC = \frac{a+b}{2}$.

1) угол АСВ – вписанный
дуга АКВ = 180

$\Big\}$ значит, угол АСВ = 90° (по свойству вписанного угла)

Таким образом, ΔACB – прямоугольный.

2) ΔABC подобен ΔADC (по двум углам), таким образом, $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$, следовательно, $AC^2 = AB \bullet AD$.

3) ΔABC подобен ΔCBD (по двум углам), следовательно $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{DB}$, следовательно, $BC^2 = AB \bullet DB$.

4) $CD \perp AB$, то есть ΔADC подобен ΔCBD.

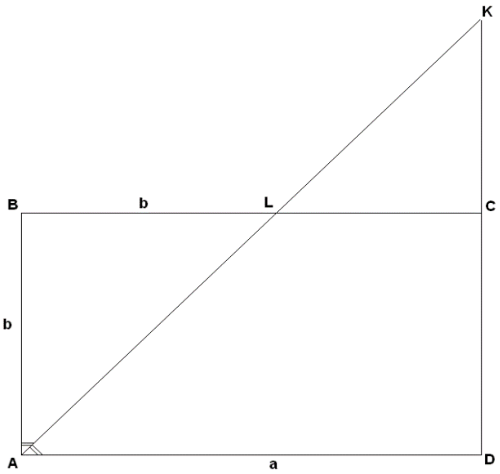
$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$, следовательно, $CD^2 = AD \bullet DB$, значит, $CD = \sqrt{AD \bullet DB}$, то есть $CD = \sqrt{ab}$.

5) ΔCDO – прямоугольный, $CD \perp OD$, значит, $CD < OC$, то есть $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$.

6) Если $a = b$, то точка D совпадает с точкой O, то $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$.

Поэтому $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$, что и требовалось доказать.

2. Геометрическое доказательство-II:



ABCD – прямоугольник, $AD = a$, $AB = b$, AK – биссектриса $\angle BAD$.
1.AK – биссектриса, следовательно, $\angle BAL = \angle LAD$.
2. $\angle LAD$ и $\angle BLA$ – внутренние накрест лежащие углы при параллельных BC и AD и секущей AL, то есть $\angle BLA = \angle LAD$.
3. $\angle B = 90°$, следовательно, $\angle BAL = \angle LAD = 45°$, но $\angle BLA = \angle LAD$, значит, ΔABL – равнобедренный, $BL = AB = b$.
4.ΔAKD – равнобедренный, так как $KD \perp AD$, $\angle DAL = 45°$, значит $AD = KD = a$.
5.$S_{ABL} = \frac{1}{2}b^2$; $S_{AKD} = \frac{1}{2}a^2$; $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$. $S_{ABCD} = ab$.
6.Очевидно, что $S_{AKD} + S_{ABL} \ge S_{ABCD}$, $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \ge ab$.
7.При чём равенство достигается при $a = b$, то есть в этом случае $ABCD$ – квадрат.

8. Итак, $\frac{a^2+b^2}{2} \ge ab$; $ab \le \frac{a^2+b^2}{2}$.

9. Заменим в неравенстве a^2 на m, b^2 на n, получим $\frac{m+n}{2} \ge \sqrt{mn}$ или $\sqrt{mn} \le \frac{m+n}{2}$,

то есть среднее геометрическое не больше среднего арифметического.

3. *Геометрическое доказательство-III:*

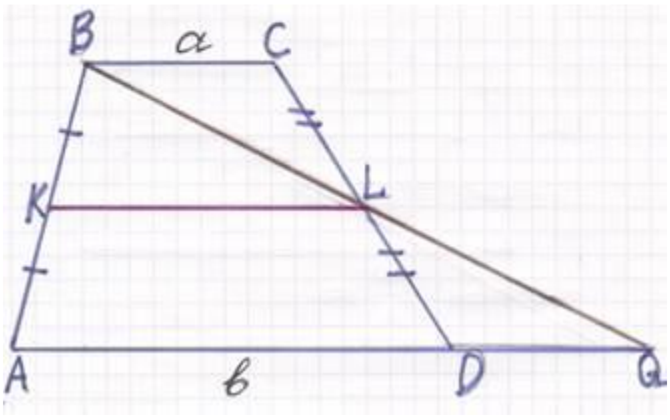
- **Среднее арифметическое.**

Средней линией трапеции называют отрезок, соединяющий середины её боковых сторон.

Докажем, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме (рисунок).

- Дана трапеция $ABCD$ со средней линией KL. Для доказательства проведём прямую через точки B и L до пересечения с прямой AD.
- Рассмотрим полученные треугольники LBC и LQD:

1.По определению средней линии точка L является серединой отрезка CD. Отсюда следует, что отрезки CL и LD равны.
2. $\angle BLC = \angle QLD$ как вертикальные.
3. $\angle BCL = \angle LDQ$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей CD.



- Из этих 3 равенств следует, что треугольники LBC и LQD равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

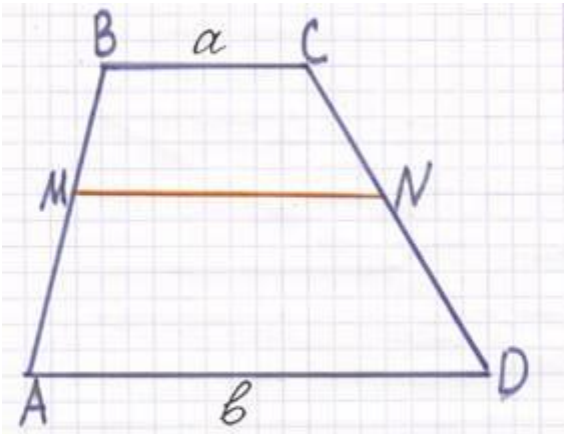
- Следовательно, $\angle LBC = \angle LQD$, $BC = DQ$ и $BL = LQ \; => \; KL$, являющаяся средней линией трапеции $ABCD$, также является и средней линией треугольника ABQ. Согласно свойству средней линии треугольника получаем:

1. $KL = 1/2AQ = 1/2\,(AD + DQ) = 1/2\,(AD + BC)$

2. KL || AD по свойству средней линии треугольника. А так как $AD||BC$ по определению трапеции, то $KL||BC$.

Если обозначить основания трапеции a и b, среднюю линию KL за m, то получим среднее арифметическое: $m = \frac{a+b}{2}$. Итак, среднее арифметическое – это длина средней линии трапеции.

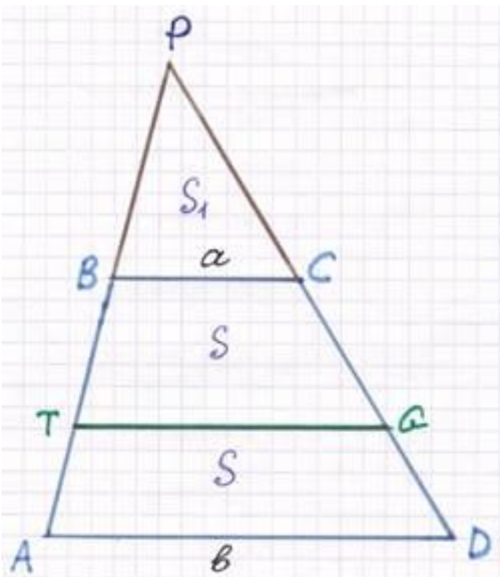
Среднее геометрическое.



- Отрезок, разбивающий трапецию на две подобные трапеции, имеет длину, равную среднему геометрическому длин оснований.
- Докажем это (рисунок).

Отрезок *MN* делит трапецию *ABCD* на две подобные трапеции *AMND* и *MBCN*.
Значит, отношения соответствующих сторон в этих трапециях равны $\frac{MN}{BC} = \frac{AD}{MN}$; $MN^2 = BC \cdot AD$; $MN = \sqrt{BC \cdot AD}$.
Обозначим длину отрезка MN буквой g.
$\boldsymbol{g = \sqrt{ab}}$.

Среднее квадратичное.



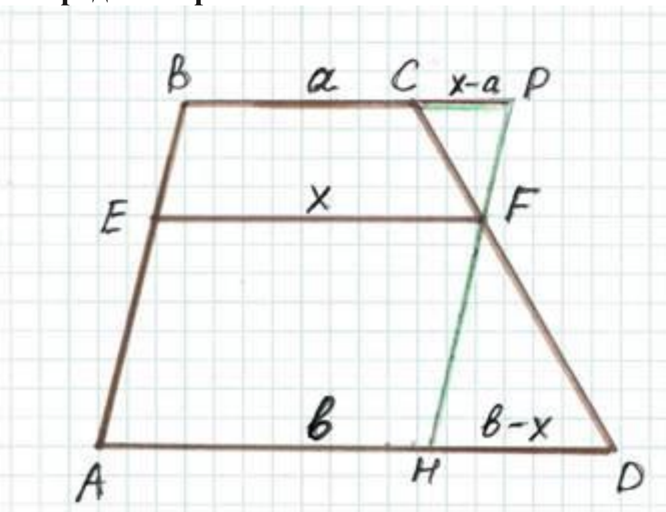
Докажем, что длина отрезка, делящего трапецию на две равновеликие трапеции, равна среднему квадратичному длин оснований.
Доказательство:

- Отрезок TG, проведенный параллельно основаниям (рисунок), делит трапецию *ABCD* на две равновеликие трапеции.
- P– точка пересечения боковых сторон трапеции. Площади трапеций $ATGD$ и $TBCG$ обозначим S, так как они равны.

Площадь треугольника BPC обозначим S_1.
- Т.к. треугольники BPC, TPG и APD подобны, то можно применить свойство: отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.
- Длину отрезка TG обозначим через x.
- Рассмотрим подобные треугольники BPC и TPG. Коэффициент подобия $k = \frac{a}{x}$.
- Получим $\frac{S_1}{S_1+S} = \left(\frac{a}{x}\right)^2$.
- Рассмотрим подобные треугольники APD и TPG.
- Коэффициент $k = \frac{b}{x}$; $\frac{S_1+2S}{S_1+S} = \left(\frac{b}{x}\right)^2$.
- Складываем оба равенства, получаем:
- $\frac{S_1}{S_1+S} + \frac{S_1+2S}{S_1+S} = \left(\frac{a}{x}\right)^2 + \left(\frac{b}{x}\right)^2$

- $\frac{2S_1+2S}{S_1+S} = \frac{a^2+b^2}{x^2}$
- $2 = \frac{a^2+b^2}{x^2}$.
- $x^2 = \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Среднее гармоническое

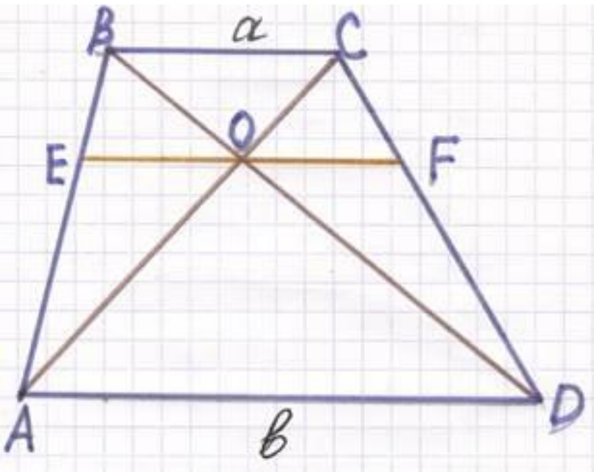


Задача1.

Пусть EF – отрезок длиной *x* с концами соответственно на боковых сторонах AB и CD трапеции ABCD, параллельный её основаниям a и b. Найдите *x*, если известно, что $\frac{BE}{EA} = \lambda$.

Решение:

- Для решения выполним дополнительное построение. Проведём через точку F $PH \parallel AB$.
- $\triangle FCP$ и $\triangle FDH$ подобны по первому признаку, так как $\angle CFP = \angle DFH$ как вертикальные, а $\angle FCP = \angle FDH$ как накрест лежащие при параллельных прямых BP и AD и секущей CD.
- $CP = x - a$; $HD = b - x$.
- Из подобия треугольников и из условия задачи следует, что $\frac{x-a}{b-x} = \lambda$.
- Тогда $x - a = \lambda(b - x) \Leftrightarrow x - a = \lambda b - \lambda x \Leftrightarrow x + \lambda x = a + \lambda b \Leftrightarrow x = \frac{a+\lambda b}{1+\lambda}$ (*).



Задача 2. Найдём x, если отрезок EF проходит через точку O - точку пересечения диагоналей трапеции.

Решение:

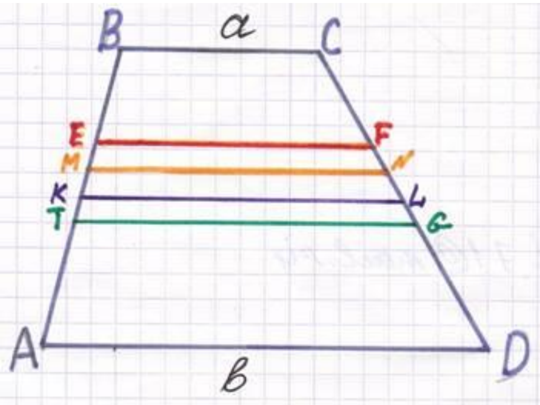
$\frac{BE}{EA} = \frac{BO}{OD} = \frac{BC}{AD} = \frac{a}{b}$.

В данной задаче $\lambda = \frac{a}{b}$.

Подставим это значение в (*), получим $EF = \frac{a+\frac{a}{b}\cdot b}{1+\frac{a}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$.

Сравнение числовых средних величин с помощью трапеции.

- Итак, в трапеции ABCD появились все упомянутые средние числа.



- Докажем неравенство: $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Доказательство:

- Пусть EF – отрезок, длина которого равна среднему гармоническому чисел a и b;
- длина отрезка MN равна среднему геометрическому чисел a и b,
- KL – отрезок с длиной, равной среднему арифметическому чисел a и b,
- TG – отрезок, длина которого равна среднему квадратичному чисел a и b.

- Тогда $\frac{BE}{EA} = \frac{a}{b}$.
- Найдем отношение $\frac{BM}{MA}$.
- Так как трапеции $AMND$ и $MBCN$ подобны, значит, отношения соответствующих сторон в этих трапециях равны: $\frac{BM}{MA} = \frac{MN}{AD} = \frac{\sqrt{ab}}{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.
- Так как KL средняя линия трапеции, то отношение $\frac{BK}{KA} = 1$.
- Но $\frac{a}{b} < \sqrt{\frac{a}{b}} < 1$, значит, $\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$.
- Теперь докажем последнее неравенство: $\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.
- Для доказательства воспользуемся формулой для нахождения площади трапеции. Пусть h_1 высота трапеции $TBCG$, а h_2 - высота трапеции $ATGD$. Так как площади этих трапеций равны, то

$$\frac{h_1 \cdot \left(a+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)}{2} = \frac{h_2 \cdot \left(b+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)}{2} \Leftrightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{b+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}{a+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}.$$

- Так как $a < b$, то $\frac{h_1}{h_2} \ge 1$. Значит, $\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Итого: для трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($BC = a, AD = b, a < b$) справедливы следующие утверждения:

1) Отрезок KL, соединяющий середины боковых сторон трапеции, параллелен основаниям и равен их полусумме (среднее арифметическое чисел a и b).
2) Отрезок MN, разбивающий трапецию на две подобные трапеции, имеет длину, равную среднему геометрическому чисел a и b, $\sqrt{ab}$).
3) Отрезок EF, проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям, равен $\frac{2ab}{a+b}$ (среднее гармоническое чисел a и b).
4) Отрезок TG, делящий трапецию на две равновеликие трапеции, имеет длину, равную $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ (среднее квадратичное чисел a и b).
5) Чтобы увидеть связь между этими отрезками, построили их для данной трапеции на одном чертеже. Положение отрезков указывает на связь между числовыми средними величинами. Трапеция позволяет наглядно сравнить средние величины и убедиться в выполнении этих неравенств:

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Итак, мы доказали неравенства и убедились в том, что при $a < b$ все неравенства – строгие.

6) Нетрудно видеть, что если какие-либо два из отрезков, длины которых мы сравнивали, равны, то $ABCD$ – параллелограмм и, следовательно, все неравенства превращаются в равенства.

Сравнение среднего арифметического и среднего квадратичного.

По определению неравенства если $(a-b) \ge 0$, то $a \ge b$, а если $(a-b) \le 0$, то $a \le b$. Но для положительных a и b имеет место выражение: если $a^2 - b^2 \ge 0$, то $a \ge b$ и наоборот.

Для доказательства $\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ рассмотрим разность:

$$(\frac{a+b}{2})^2 - (\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}})^2 = \frac{a^2+2ab+b^2}{4} - \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{a^2+2ab+b^2-2a^2-2b^2}{4} = \frac{-a^2+2ab-b^2}{4} =$$

$$\frac{-(a^2-2ab+b^{2)}}{4} = \frac{-(a-b)^2}{4} = -\frac{1}{4}(a-b)^2 \le 0$$

Значит по определению неравенства (при $a \ge 0;\ b \ge 0$) разность квадратов отрицательна, то есть уменьшаемое меньше вычитаемого. Таким образом $\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, причём равенство достигается только при a=b, *так как* $-\frac{1}{4}(a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$.

Сравнение среднего гармонического и среднего геометрического.

Докажем, что среднее гармоническое не больше среднего геометрического, то есть $\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab}$

Рассмотрим разность

$$(\frac{2ab}{a+b})^2 - (\sqrt{ab})^2 = \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} - ab = \frac{4a^2b^2 - ab(a^2+2ab+b^{2)}}{a^2+2ab+b^2} = \frac{ab(4ab-a^2-2ab-b^2)}{(a+b)^2} =$$

$$= \frac{ab(-a^2+2ab-b^2)}{(a+b)^2} = \frac{-ab(a^2-2ab+b^2)}{(a+b)^2} = \frac{-ab(a-b)^2}{(a+b)^2}$$

При условии, что a и b положительны разность квадратов $\frac{-ab(a-b)^2}{(a+b)^2} \le 0$, то есть уменьшаемое меньше вычитаемого. Значит $\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab}$, причём равенство достигается лишь при $(a-b)^2 \Leftrightarrow a = b$.

Вывод: таким образом, мы доказали одно из важнейших неравенств, связанных со средними:

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

IV Средние для *n* положительных чисел.

Вообще средние величины можно находить для любого количества положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$. Определения этих средних даны выше. Для любых положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее гармоническое, среднее квадратичное удовлетворят неравенствам:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 \bullet a_2 \bullet ... \bullet a_n} \le \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}},$$

в каждом из которых знак равенства достигается лишь в случае, когда $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Самым важным и значимым из этих неравенств является неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, которое носит название неравенства Коши.

V Замечательное неравенство Коши.

$$\sqrt[n]{a_1 \bullet a_2 \bullet ... \bullet a_n} \le \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$$

Это знаменитое неравенство принадлежит французскому математику О.Коши, которое было опубликовано в 1821 году. В то время его доказательство занимало несколько страниц сложных выкладок и было основано на методе математической индукции. С тех пор появилось несколько десятков различных доказательств этого неравенства.

Теорема.

Для неотрицательных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ справедливо неравенство Коши $\sqrt[n]{a_1 \bullet a_2 \bullet ... \bullet a_n} \le \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$.

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Доказательство.

- Пусть числа $a_1, a_2, ..., a_n$ - положительны и $\varphi_n = \sqrt[n]{a_1 \bullet a_2 \bullet ... \bullet a_n}$. Это число называется средним геометрическим положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, при $n \ge 2$ (если n=1, то $\varphi_1 = a_1$).
- Возведём обе части равенства в *n* – ную степень.
- Получим

$$\varphi_n^n = a_1 \bullet a_2 \bullet ... \bullet a_n$$

$$\varphi_n^n = \varphi_{n-1}^{n-1} \bullet a_n$$

$$a_n = \frac{\varphi_n^n}{\varphi_{n-1}^{n-1}}$$

- Умножим числитель и знаменатель этого равенства на φ_{n-1}.

$$a_n = \frac{\varphi_{n-1} \bullet \varphi_n^n}{\varphi_{n-1}^n} = \varphi_{n-1} \bullet (\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}})^n,\ n = 2, 3, 4, 5, \ldots$$

- Применим неравенство Бернулли ($q^n \geq 1 + n(q-1)$), заменив в нём q на $\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}$.

- Получим

$$q = \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}$$

$$q^n = (\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}})^n$$

$$a_n = \varphi_{n-1} \bullet q^n$$

$$q^n \geq 1 + n(q-1)$$

$$(\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}})^n \geq 1 + n(\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} - 1)$$

$$a_n \geq \varphi_{n-1}(1 + n(\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} - 1)) = \varphi_{n-1} + \varphi_{n-1} \bullet n(\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} - 1) = \varphi_{n-1} + \varphi_{n-1} \bullet n \bullet \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} -$$
$$- \varphi_{n-1} \bullet n = n\varphi_{n-1} - \varphi_{n-1}(n-1), n \geq 2$$

Таким образом $a_n \geq n\varphi_n - \varphi_{n-1}(n-1)$

Если n = 2, то $a_2 \geq 2\varphi_2 - \varphi_1$;

Если n = 3, то $a_3 \geq 3\varphi_3 - 2\varphi_2$;

Если n = 4, то $a_4 \geq 4\varphi_4 - 3\varphi_3$;

И так далее, наконец:

$$a_{n-1} \geq (n-1)\varphi_{n-1} - (n-2)\varphi_{n-2}$$

$$a_n \geq n\varphi_n - (n-1)\varphi_{n-1}$$

Сложим эти неравенства почленно, получим:

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_n \geq n\varphi_n - \varphi_1 = n\varphi_n - a_1$$

Перенесём a_1 влево, разделим неравенство на *n*.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n\varphi_n$$

$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \varphi_n$, где $\varphi_n = \sqrt[n]{a_1 \bullet a_2 \bullet \ldots \bullet a_n}$

Таким образом $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \bullet a_2 \bullet \ldots \bullet a_n}$.

Равенство достигается, когда все *a* равны.

Это неравенство справедливо и для неотрицательных чисел.

Существуют и другие варианты записи неравенства Коши:

1) Возведём обе части неравенства Коши в *n*- ную степень

Получим: $(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n})^n \geq (\sqrt[n]{a_1 \bullet a_2 \bullet \ldots \bullet a_n})^n$

$$(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n})^n \geq a_1 \bullet a_2 \bullet \ldots \bullet a_n$$

2) Умножим обе части получившегося неравенства на n^n $(n \in N)$

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^n \geq n^n \bullet a_1 \bullet a_2 \bullet \ldots \bullet a_n$$

VI Задачи на применение неравенства Коши.

Задача № 1 Произведение положительных чисел $a_1 \bullet a_2 \bullet \ldots \bullet a_n = 1$. Доказать, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n$

Решение. Применим неравенство Коши:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \bullet a_2 \bullet \ldots \bullet a_n};$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq 1;$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq n$$

Задача №2. Решить уравнение: $\dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \dfrac{1}{1 + (x-2)^2} + \dfrac{2}{2 + (x-2)^2}$

Решение. При x = 2 правая часть уравнения равна 2, а при $x \neq 2$ будет меньше 2, поскольку каждое слагаемое меньше 1. Итак, правая часть не превосходит 2. Левую часть представим в виде

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \frac{1}{x - 1} \quad (x>1)$$

Применим неравенство Коши для слагаемых $(x-1)$ и $(\dfrac{1}{x-1})$.

$$\frac{x - 1 + \frac{1}{x-1}}{2} \geq \sqrt{(x-1) \bullet (\frac{1}{x-1})} \quad (x > 1)$$

$$\frac{x - 1 + \frac{1}{x-1}}{2} \geq 1$$

$$x - 1 + \frac{1}{x-1} \geq 2$$

Таким образом правая часть уравнения не превосходит 2, а левая часть не меньше 2. Равенство достигается если обе части равны двум, то есть

$$x - 1 + \frac{1}{x-1} = 2$$

Значит при x = 2.

Ответ: x = 2

С помощью неравенства Коши можно находить наибольшее и наименьшее значения функции без использования производной. Для этого потребуются утверждения, вытекающие непосредственно из неравенства Коши:

1. Равенство в неравенстве Коши достигается, когда все, учавствующие в нём числа одинаковы.
2. Если сумма положительных чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$ равна *a*, то произведение этих чисел принимает наибольшее значение при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \dfrac{a}{n}$ и это наибольшее значение равно $\left(\dfrac{a}{n}\right)^n$.
3. Если произведение положительных чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$ равно *b*, то их сумма принимает наименьшее значение при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \sqrt[n]{b}$ и это значение равно $n \bullet \sqrt[n]{b}$.

Задача № 3. Найти наименьшее значение функции $f(x) = \dfrac{x^3 + x + 2}{x}$, $x \in (0; \infty)$.

Решение. Представим функцию $f(x)$ в виде суммы слагаемых: $f(x) = \dfrac{x^3 + x + 2}{x} = x^2 + 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x}$.

Найдем произведение этих слагаемых: $x^2 \bullet 1 \bullet \dfrac{1}{x} \bullet \dfrac{1}{x} = 1$.

Это означает, что своё наименьшее значение сумма слагаемых принимает при $x^2 = 1 = \dfrac{1}{x}$, то есть при $x = 1$.

$$f(1) = \frac{1 + 1 + 2}{1} = 4.$$

Ответ: y = 4 – наименьшее значение функции, которое достигается при *x = 1.*

Задача № 4. Найти наибольшее значение функции $f(x) = x^2 \bullet \sqrt{4-x^2}$ на отрезке $-2 \le x \le 2$.

Решение. Возведём функцию в квадрат, получим: $f^2(x) = x^2(4-x^2)$, разделим обе части на 4:

$$\frac{f^2(x)}{4} = \frac{x^2(4-x^2)}{4}.$$

Представим произведение в виде произведения

$$\frac{x^2(4-x^2)}{4} = \frac{x^2}{2} \bullet \frac{x^2}{2} \bullet (4-x^2).$$

Найдём сумму этих множителей

$\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^2}{2} + (4-x^2) = 4$, то есть сумма принимает постоянные значения.

Следовательно, функция $\dfrac{f^2(x)}{4}$, а значит и функция $f(x)$ достигает наибольшего значения при $\dfrac{x^2}{2} = 4-x^2$.

$$x^2 = 8-2x^2$$

$$3x^2 = 8$$

$$x^2 = \frac{8}{3}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{8}{3}} = \pm\frac{2\sqrt{2}\bullet\sqrt{3}}{3} = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Найдём значения функции в этих точках

$$f\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right) = \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 \bullet \sqrt{4-\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^3} = \frac{16\sqrt{3}}{9}$$

$$f\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right) = \left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 \bullet \sqrt{4-\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{16\sqrt{3}}{9}$$

Следовательно, наибольшее значение функции равно $\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$ при $x = \pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Задача № 5. При каких значениях *x* функция $f(x) = (1+2x)^4(1-2x)$ достигает наибольшего значения?

Решение. Запишем функцию $y = f(x)$ в виде

$$f(x) = \frac{1}{4}(1+2x)(1+2x)(1+2x)(1+2x)(4-8x).$$

Найдем сумму этих 5 сомножителей: $1+2x+1+2x+1+2x+1+2x+4-8x = 8$.

Применим неравенство Коши для *n = 5*

$$\frac{1}{4} \bullet \frac{1+2x+1+2x+1+2x+1+2x+4-8x}{5} \ge \sqrt[5]{\frac{(1+2x)^4(4-8x)}{4}}$$

$$\frac{1}{4} \bullet \frac{8}{5} \ge \sqrt[5]{f(x)}$$

$$f(x) \le \left(\frac{2}{5}\right)^5$$

Следовательно, функция достигает наибольшего значения равного $\left(\dfrac{2}{5}\right)^5$, если

$$(1+2x) = (4-8x)$$

$$10x = 3$$

$$x = 0{,}3$$

$$0{,}3 \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$$

Ответ: при $x = 0{,}3$ функция достигает наибольшее значение.

Задача № 6. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = \dfrac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Найдём область определения функции $D(f) = [0;+\infty]$.

1) $f(0) = 0$ - наименьшее значение, так как $f(x) \ge 0$.

2) Применим неравенство Коши для *n = 2* для слагаемых $\sqrt[6]{x}$ и $\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}$.

$$\sqrt[6]{x} + \frac{1}{\sqrt[6]{x}} \geq 2$$

$$\frac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[6]{x}} \geq 2$$

$$\frac{\sqrt[6]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} \leq \frac{1}{2}$$

$f(x) \leq \frac{1}{2}$, то есть функция имеет наибольшее значение $\frac{1}{2}$, оно достигается, если

$$\sqrt[6]{x} = 1$$

$$x = 1$$

Действительно, $f(1) = \frac{1}{2}$.

Ответ: $f_{наиб} = \frac{1}{2}(x = 1)$ $f_{наим} = 0(x = 0)$.

Заключение.

Неравенства для средних и сами средние широко применяются не только в алгебре, геометрии, математическом анализе, но и в статистике, в теории вероятностей (оттуда пришло среднее квадратичное), при обработке результатов измерений. Средняя урожайность, средняя плотность населения, средняя температура, средняя рождаемость, средняя глубина реки, – это примеры средних величин, постоянно окружающих нас. Неравенства играют фундаментальную роль в большинстве разделов современной математики, без них не может обойтись ни физика, ни математическая статистика, ни экономика. По словам Э. Беккенбаха **(**1906 – 1982, американский математик), «…основные результаты математики чаще выражаются неравенствами, а не равенствами». Однако до сих пор нет хорошо разработанной, достаточно общей «теории неравенств», хотя для обоснования отдельных классов неравенств такую теорию удалось создать.